سلسلة كتب تنمى التفكير الهندسى والابتكارى للجميع

إلى محبى الاكتشاف والاختراع الرياضى من سن ١١ - ١٥ سنة فأكثر

نقدم :

سحر وغرائب هندسة جديدة

٣

أشكال بعيدة التصور

تأليف

أ.د. نظلة حسن أحمد خضر

كلية التربية - جامعة عين شمس



الهيئة المصرية العامة للكتاب

بسم الله الرحمن الرحيم

« . . ربنا الذى أعطى كل شىء خلقه، ثم هدى . . . »

« تبارك الله أحسن الخالقين . . . »

مقدمة :

كلنا شاهدنا أشياء تقع على الأرض ، شىء يقع من يدك أو من أى مكان على الأرض . وقد نصاب بضيق اذا كان الذى وقع انكسر ، أو نلهو ونلعب ونتسابق للحصول عليه اذا كان ذا فائدة . الا أن شخصا محبا للرياضيات شاهد تفاحة وهى تقع على الأرض من شجرة وهو فى حالة تأمل ، ولم يمر عليها مر الكرام ، واكتشف منها قانون الجاذبية . . . كلنا نعرفه انه نيوتن .

معظمنا يلهو ويلعب على شاطىء البحر ، وكل ما يهمنا أن الموج غير عال ، وأن البحر مناسب للعب والاستحمام ، الا أن بعض العلماء أثناء لعبهم واسترخائهم تأملوا حركة الموجات واكتشفوا منها قوانين ساعدت فى دراسة الحركة الموجية واستزادوا علما ليطبقوها فى أرجاء بعيدة عن الماء والبحر كعلوم الفضاء والكهربية والحاسبات .

بعضنا يحب اللعب بالألغاز وحلها كألغاز عيدان الثقاب وألغاز الأعداد وألغاز الأشكال الهندسية . ولكنه يكسل أن يمتد بتفكيره ليكتشف سر عمل اللغز أو يحاول عمل لغز آخر مثله .

نريد أن نحررك من هذا الكسل ونثير اهتمامك باختراعات واكتشافات غريبة عليك فى مجال الرياضيات ، ونقدم لك أفكاراً لهندسة جديدة ولدت من اللعب والألغاز والحيل وألعاب السحر . ولم يقف الرياضيون عند مجرد اللعب بها ، ولكن تأملوا وتعمقوا واكتشفوا وبنوها كعلم جديد به قوانين ونظريات وله استخدامات شتى حتى فى علوم الفضاء والكمبيوتر .

نحاول فى هذا الكتاب أن نعودك على الملاحظة من اللعب أو من التعامل بالأشياء والأفكار وأن نقدم اللعبة واللغز والحيلة والسحر والمعلومة ليس غاية فى حد ذاتها ولكنها كوسيلة لتقوى قدرتك على الملاحظة وتكتشف منها الأساس الرياضى بأسلوب ممتع ومثير للتفكير الابتكارى (الخلاق) . وذلك من خلال نشاطك ولعبك مع الأصدقاء وللتعرف على هندسة جديدة واستخدامات بسيطة لها .

وأود أن أذكرك ياعزيزى القارىء أن القوانين وأسرار الكون لا تكون ظاهرة ولكن تحتاج إلى المثابرة والتفكير فى بواطن الأمور . فمثلا كلنا نرى

الشمس تشرق من مكان وتغرب فى مكان آخر ويبدو من الظاهر أن الأرض ساكنة والشمس هى التى تدور حولها ، ولكن الحقيقة عكس ذلك فالأرض هى التى تدور حول الشمس كما تعلمنا . فسبحانه ... « يعلم السر وأخفى » ... حتى نستغل كنز التفكير فى البحث بصبر . فأسرار الكون لا يعطيها الله لعباد كسالى ولكن لعباد تعبوا وصبروا فنالوا جزاء أعمالهم فكما يقول سبحانه ... « ان فى ذلك لآيات لكل صبّار شكور » ...

وعلى ذلك فقد حرصت من خلال هذا الكتاب أن أحررك ياعزيزى القارىء من كسلك وأدربك على العمل بصبر وأشغلك بأعمال باطنها أفكار رياضية جديدة غريبة أساعدك على تأملها وملاحظتها واكتشافها . . لأربى فيك أيضا قدرتك على التفكير فى بواطن الأمور وأزرع فيك الصبر والمثابرة .

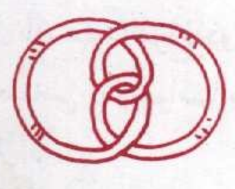
والله ولى التوفيق

المؤلفة

تعرفنا على العقدة فى الكتاب الأول شكل (١٠) وعرفنا أنها تكافىء شكلا دائريا أى تكافىء منحنى مقفولاً بسيطاً . ووضحنا ذلك بعملية القطع والوصل وليس بعملية التحوير اذ يستحيل تحويل العقدة إلى شكل دائرة بالتحوير (أى بالشد والضغط دون التمزيق) . كذلك يستحيل تحويل العقدة فى شكل (٣٥) أ إلى العقدة فى شكل (٣٥) ب التى تعتبر صورة أ فى مرآة عن طريق التحوير . أما العقدة فى شكل (٣٥) جـ فيمكن تحويلها بالتحوير ليكون شكلها شكل صورتها فى مرآة . حاول أن تعمل نماذج لهذه العقد بخيط ماط (أستك) لتتأكد من صحة ما ذكرناه .







شكل (٣٥)

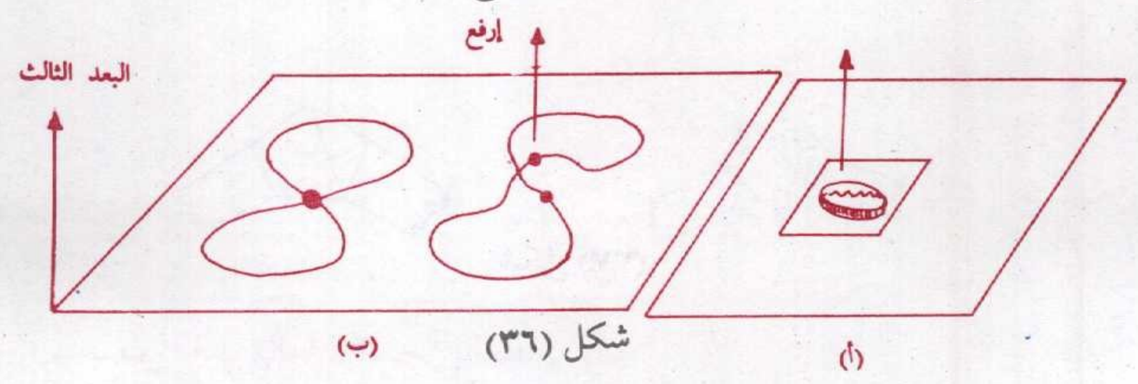
الفراغ الذى نعيش فيه ونرى فيه المجسمات كالكرة والهرم ، والعقدة . . نسميه فراغا ذا ثلاثة أبعاد . ولنعرف السبب فى تسميته تعال نتذكر أو نتعرف على فراغ ذى بعد وفراغ ذى بعدين .

نموذج الفراغ ببعد هو خط الأعداد . كل نقطة عليه تتحدد عن طريق عدد موجب أو سالب بالنسبة لنقطة معينة (هى نقطة الأصل) الذى درسته فى المدرسة . فمثلا اذا كان شىء لا يستطيع أن يسير الا على خط كقطار على قضيب مستقيم فمن محطة ما يمكن ان نقول أن القطار على يمينها أو يسارها بكذا كيلو متر . أما الفراغ ذو بعدين فهو مثل سطح مستوى : مكانك فى الفصل يتحدد بالعمود والصف الذى تقع فيه . أى يتحدد بزوج من الأعداد . كذلك سطح كرة هو فراغ ببعدين فمثلا أى مكان على سطح الكرة الأرضية يمكن أن يتحدد عن طريق خط الطول وخط العرض الذى تقع فيه أى عن طريق عددين . أما مكان شقتك فيتحدد بالصف والعمود والطابق الذى تسكنه أى بثلاثة اعداد ولذا فاننا نقول أن هذا الفراغ ذو ثلاثة أبعاد . هذا هو الفراغ باكبر بُعد يمكن أن نستطيع الاحساس به بحواسنا ولكن يمكن أن نتعامل بالرياضيات بفراغ ذى أربعة أبعاد وأكثر . . .

كيف نتخلص أو نتغلب على مشكلة فى فراغ ببعد أكبر ؟

ارسم مربعا على منضدة وضع داخله قرشاً . اذا كنت حر الحركة فقط على مستوى المنضدة (أى فى بعدين) وطلب منك أن تخرج القرش من المربع دون أن

تمر باحد أضلاعه فانك لن تستطيع . أى أنك لا تستطيع حل المشكلة فى بعدين . . ولكن اذا كنت حر الحركة فى البعد الثالث فإنه يمكنك رفع القرش الى أعلى وتخرجه من المربع دون أن تمر باحد أضلاعه . أى أنه أمكنك حل المشكلة بالتعامل مع بعد أكبر . وبالمثل اذا رسمت منحنى على شكل رقم 8 على ورقة أو عملت نموذجاً لها من الأستك ووضعته على منضدة (أى فى بعدين) تجد نقطة تقاطع ذاتى ، اذا كنت حر الحركة فى البعد الثالث فانه يمكنك رفع احد فرعى المنحنى (أو الأستك) للتخلص من هذا التقاطع . انظر شكل (٣٦) ب .

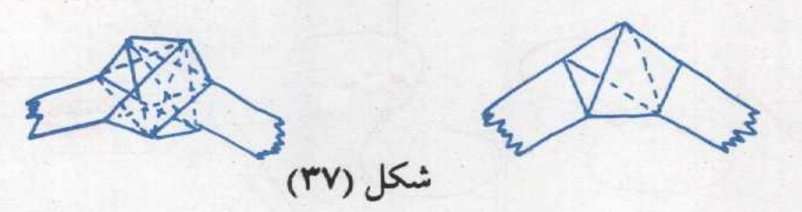


شكل (٣٦)

من نفس المنطلق يمكن أن تثبت رياضيا أنه فى فراغ ذى أربعة أبعاد (والذى لا ندركه بحواسنا) يمكن أن نحول العقدة بالتحوير الى منحنى مقفول بسيط دون أن تتقاطع مع نفسها .

والواقع أن دراسة العقد وتصنيفها الى أنواع يحتاج الى رياضيات عالية فى هذه الهندسة الجديدة . ويكفى هنا أن تحاول عمل نماذج لبعض العقد (بالخيط أو الأستك أو الأسكوبودو أو شرائط البلاستيك) كما فى شكل (٣٧) ثم بعد ذلك نلهو ونلعب بلعب السحر لبعض العقد .





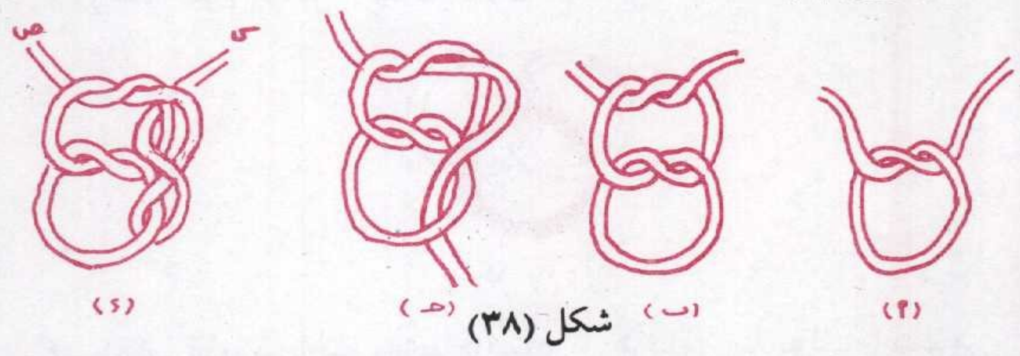
شكل (٣٧)

بعض الحيل وألعاب السحر بالعقد :

كشريط موبيس العجيب واللعب به بألعاب الساحر يمكن أيضا أن نلعب بالعقد بألعاب الساحر ، فالعقد تمدنا بألغاز ومشكلات مشوقة يمكن أن ننعم باللعب بها مع الأصدقاء نقدم بعضا منها فيما يلى :

١ ــ من أشهر العقد التى يلعب بها الساحر عقدة تسمى عقدة شيغالو ، وهى فى

الواقع عقدة (مزيفة) . احضر شريط استك أو خيطاً سميكاً وحاول عمل هذه العقدة فى شكل (٣٨) د بتتبع الخطوات بدقة مع تتبع الأسهم فى الأشكال (٣٨) أ ، ب ، ج ، ثم شد الطرفين س ، ص تجد أن العقدة اختفت .

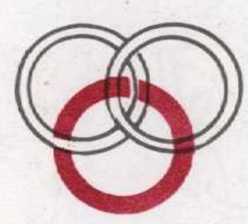


شكل (٣٨)

٢ ــ اعمل عقدتين كما فى شكل (٣٩) لاحظ أن إحداهما عكس الأخرى ولكن عندما تقربهما من بعضهما لاتفكان بعضهما البعض . ولكن إحداهما تمر خلال الأخرى الى الناحية الأخرى وتترك العقدتين كما كانتا من قبل بدون تغيير فيهما .

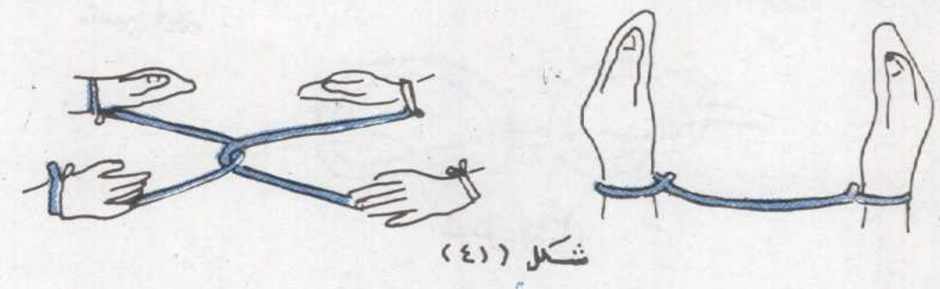
شكل (٣٩)

٣ ــ اعمل من سلك أو ورق مقوى ثلاث حلقات كما فى شكل (٤٠) ا هذه الحلقات لها علاقة غريبة فى هذه الهندسة . اذا نزعت أو قطعت أى حلقة تجد أن الحلقتين الأخريين انفصلتا . أى أن أى حلقتين غير متصلتين (متداخلتين) ولكن الحلقات الثلاث مع بعض متداخلة .



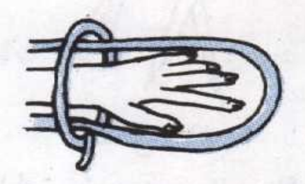
شكل (٤٠) ا

٤ ــ احضر قطعة من الخيط واربط طرفيها ، كل طرف فى رسغ يد لك واطلب من زميلك أن يحضر قطعة خيط وأن يربط طرفيها فى رسغيه بحيث يمر خيطك من خلال خيطه كما فى الشكل . ثم حاول أن تخلص خيطك دون أن تقطع الخيط او تفك الطرفين .



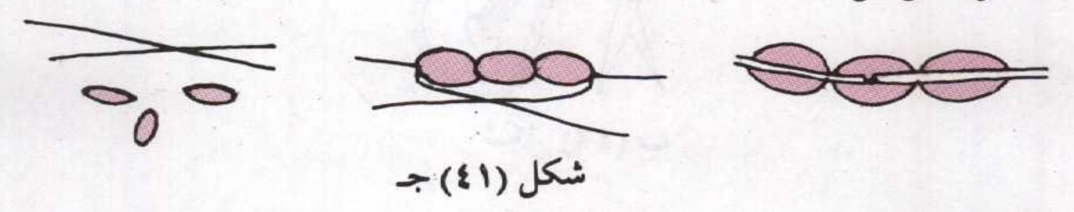
شكل (٤١)

والحل يكون ممكنا اذا عملت خية تحت خية رسغ زميلك ثم شد خيتك فوق يده وستكون حرا . انظر شكل (٤١) ب .



شكل (٤١) ب

وهذه تذكرنى بلعبة قديمة ساذجة من ألعاب الساحر . وهى احضار قطعتين من الخيط وتمرير إحداهما خلال الأخرى ثم لضم حبات خرز . اذا قمت بشد طرف من كل جانب تسقط الخرزات الثلاث . انظر الشكل وحاول عملها .



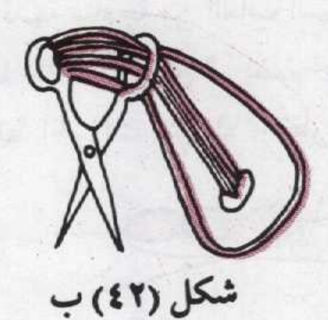
شكل (٤١) جـ

٥ ــ اربط خيطاً بخية فى مقص كما فى الشكل ثم اربط نهايتى الخيط فى زرار كبير نسبيا لا يمر من يد المقص . ثم اطلب من أحد أصدقائك ان يحرر الزرار من المقص دون أن يقطع الخيط أو يفك الزرار .



شكل (٤٢) ا

والحل ببساطة ان تمر الخية وتمررها من اليد الأخرى حتى تصل إلى الزرار لتفك العقدة .



شكل (٤٢) ب

وأخيرا يمكنك أن تلعب لعبة لطيفة قديمة من ألعاب الساحر بحزام أستك دائرى ، بمتابعة الشكل التالى فى وضع الأستك حول السبابة ولفه حول الوسطى ثم لفه ثانية حول السبّابة ، عندما تزحلق بخفة الأستك من الوسطى تجد أنه ينط وينتقل بسرعة من السبابة إلى الوسطى .



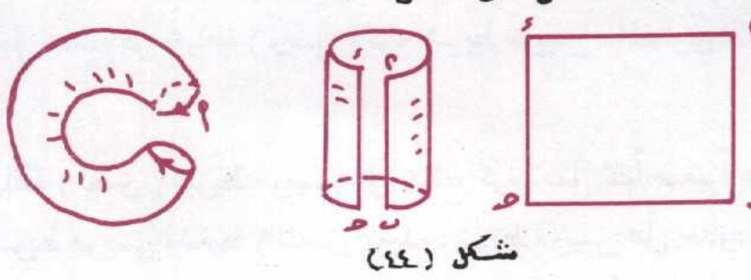
شكل (٤٣)

وبعد أن لعبنا بالعقد تعال نكتشف أشكالا غريبة جديدة فى هذه الهندسة .

تكوين أشكال مألوفة وأشكال غريبة أبعد من الخيال فى هذه الهندسة (للقارىء الأكبر سنا) :

١ ــ عمل شكل الكحكة (أو اطار العجلة) من ورقة مستطيلة .

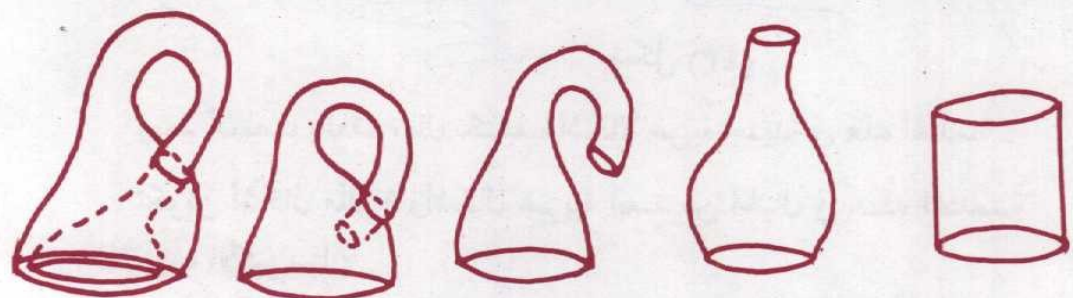
لو احضرت ورقة مستطيلة (ولتكن مطاطة) أ ب جـ د ، كما فى الشكل ولصقت الحرفين أ ب جـ د ، فانك تكوّن شكل اسطوانة ، واذا شددت طرفيها ولصقتهما تحصل على شكل الكحكة .



شكل (٤٤)

٢ ـ عمل أغرب قنينة (زجاجة) : تسمى قنينة كلاين .

يمكن تصور تشكيل هذه القنينة بأخذ اسطوانة (وتخيل أنها مطاطة) . وتضييق أحد طرفيها وثنيه ولفه ليخترق جانبها ثم توسيع الطرف ثانية (بمطه) ولصقه (خياطته) بالطرف الآخر للاسطوانة كما فى الشكل .



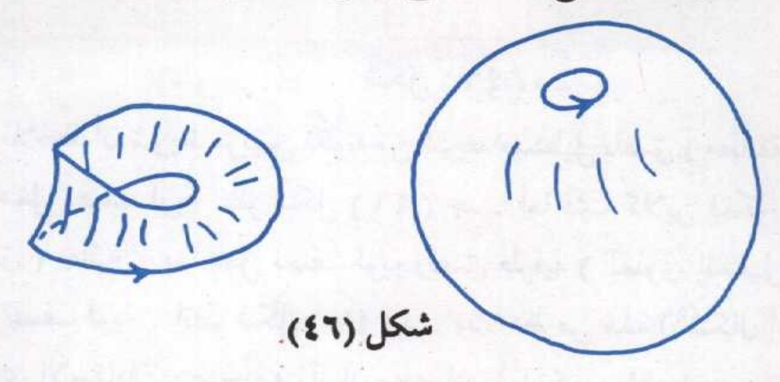
شكل (٤٥)
تكوين قنينة كلاين

لاحظ أن هذا أول شكل (أو سطح) يتقاطع مع نفسه والآن تعال نكتشف ما يأتى :

ثالثا : عمل سطح من خياطة (وصل) كرة بشريط موبيس ـ المستوى الاسقاطى الحقيقى :

لخياطة (لصق) شريط موبيس على سطح كرة نعمل ثقباً صغيراً على الكرة ونأخذ شريط موبيس ونخيط (نلصق) حدود شريط موبيس على حدود الثقب .

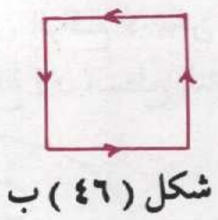
هذا يبدو سهلا . ولكن فى الواقع لا يمكن عمله فى فراغنا ذى الثلاثة أبعاد أو تصور عمله فى هذا الفراغ لان السطح الناتج سيتقاطع ذاتيا مع نفسه .



شكل (٤٦)

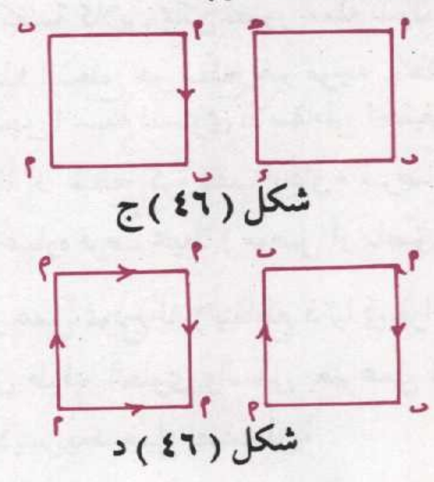
هذا السطح كقنينة كلاين يمكن تصور عمله بدون تقاطع ذاتى فى الفراغ ذى الأربعة ابعاد . هذا السطح هو سطح غير موجه . هذا السطح يكافىء فى هذه الهندسة سطحاً مشهوراً اسمه المستوى الاسقاطى الحقيقى Real Projective Plane وقد سبق أن ذكرنا أن سطح كرة بثقب يكافىء قرصاً . وعلى ذلك فالمستوى الاسقاطى يمكن اعتباره قرصاً مخيطاً (موصل أو ملصق) به شريط موبيس .

ويمكن تصور عمل نموذج له (يتقاطع ذاتيا فى فراغنا ذى الثلاثة أبعاد) من شريط ورق بلصق طرفيه العلوى والسفلى بعد عمل نصف لوية ولصق طرفيه الجانبين الأيمن والأيسر بعد عمل نصف لوية .



شكل (٤٦) ب

نلاحظ أن شريط موبيس نكّونه من شريط مستطيل بلصق (مطابقة) جانبيه بعد عمل نصف لوية انظر شكل (٤٦) جـ . أما قنينة كلاين فمكونة بمطابقة (لصق) جانبين بعد عمل نصف لوية ولصق طرفيه (العلوى السفـلى) بدون عمل نصف لوية . انظر شكل (٤٧) د . ونلاحظ من هذه الأشكال أن تكوين المستوى الاسقاطى يتضح فيه رأسان منفصلان أما تكوين شريط موبيس أو قنينه كلاين فيتضح رأس واحد فقط بهذا الاسلوب .

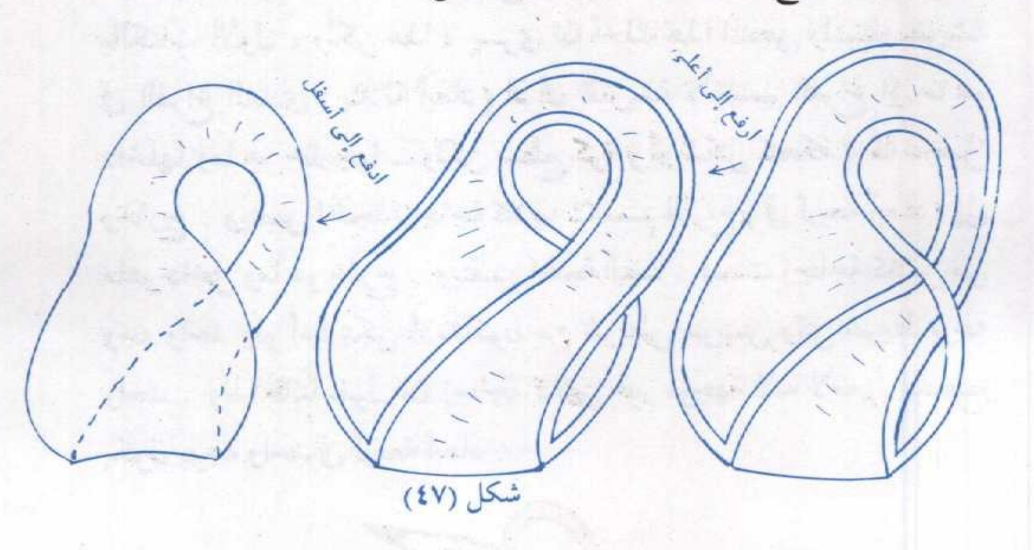


شكل (٤٦) ج

شكل (٤٦) د

غرائب قنينة كلاين :

١ ــ قنينة كلاين عبارة عن زوج من شريط موبيس (مخيط أو ملصق حرفهما مع بعض) حاول أن تتصور ذلك بتخيل قطع القنينة شريحتين بمستوى الورقة . فتقطع دائرة التقاطع إلى نصفين . ثم تصور زحلقة نصفى القنينة والتخلص من التقاطع بالرفع قليلا للجزء الأرفع للنصف العلوى والدفع إلى أسفل للجزئ الأرفع للنصف السفلى انظر الشكل .



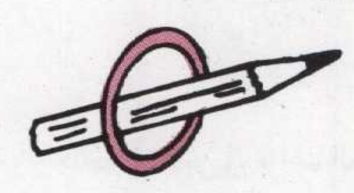
شكل (٤٧)

٢ ــلا يمكن تكوين قنينة (زجاجة) كلاين فى فراغنا العادى (بثلاثة أبعاد) بدون

التقاطع الذاتى . وكما فعلنا بالنسبة للمنحنى على شكل 8 فى شكل (٣٦) حيث تخلصنا من التقاطع الذاتى بالدفع الى أعلى فى بعد أكبر وهو البعد الثالث فانه يمكن التخلص من التقاطع الذاتى لقنينة كلاين فى البعد الرابع .

٣ ـ زجاجة (قنينة) كلاين ليس لها داخل ولاخارج وليست سطحاً بوجه واحد .

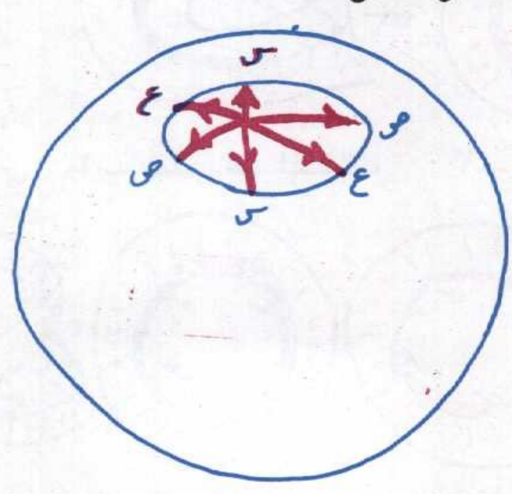
اذا رسمنا منحنى مقفولاً بسيطاً على ورقة فانه يقسم الورقة (ذات بعدين) الى جزء داخل المنحنى وجزء خارج المنحنى كما وضحنا فى شكل ٤ ، ٦ بالكتاب الأول ، ولكن هذا لا يسرى اذا أخذنا هذا المنحنى ولنمثله بغويشة فى الفراغ العادى (بثلاثة أبعاد) اذ أن الغويشة لا تقسم الفراغ الى ما هو داخلها وما هو خارجها ــ ولكن سطح كرة (أو شكل كحكة) لها داخل وخارج . وبنفس الحجة فزجاجة كلاين لاتقسم الفراغ (فى أربعة أبعاد) إلى ماهو داخل وما هو خارج . وبنفس الحجة أيضا ، ليست زجاجة كلاين من وجه واحد ولو أنها يمكن أن تتكون من شريطى موبيس وكل شريط بوجه واحد . ولذا فاننا نقول ان زجاجة كلاين غير موجهة لأنه لامعنى لسطح يكون بوجه واحد فى أربعة أبعاد .



ومن الجدير بالذكر أن كلاين مخترع زجاجة كلاين كان تلميذا لموبيس مخترع شريط موبيس .

غرائب المستوى الاسقاطى الحقيقى - السطح المتكون من خياطة كرة بشريط موبيس :

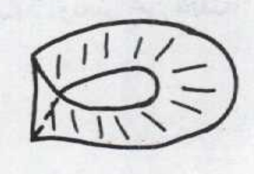
١ ـ السطح المتكون من خياطة كرة بشريط موبيس أى المستوى الاسقاطى الحقيقى يكافىء سطحاً متكوناً من ثقب كرة وخياطة (وصل أو لصق) كل زوج من نقط تقاطع قطر للثقب مع حافة (حدود) الثقب . ونعبر عن ذلك بالخياطة قطريا . انظر الشكل .

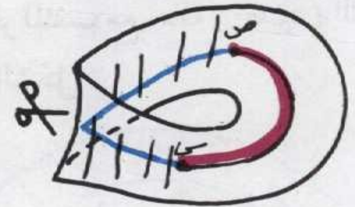


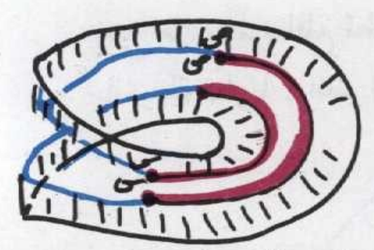
شكل (٤٨)

ونوضح ذلك للقارىء الأكبر فيما يلى :

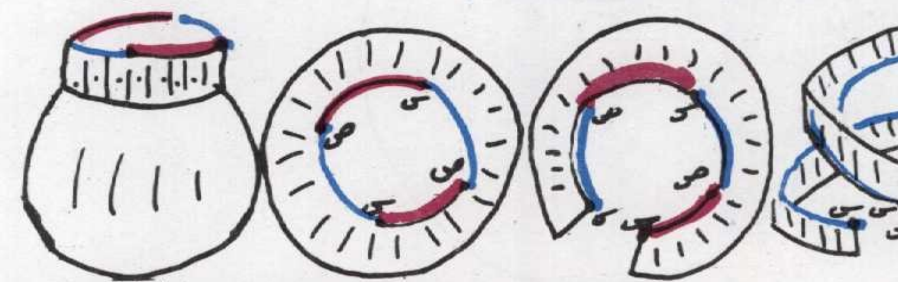
بأخذ شريط موبيس وبالقص عند المنتصف نحصل على شريط موبيس بعدة لويات كما ذكرنا سابقا . هذا الشريط يكافىء شريطاً بدون لويات فى هذه الهندسة كما بينا بعملية القطع والوصل ثم وصل (لصق) هذا الشريط بالثقب نجد أن : وصف هذا السطح كشريط موبيس مخيط بكرة هو نفس وصفه بخياطة ثقب قطريا على سطح الكرة تتبع ذلك من الرسم التالى :







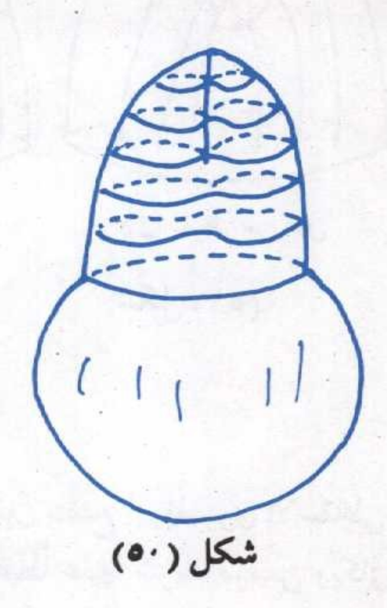
١ ـ شريط موبيس　　٢ ـ القص عند المنتصف　　٣ ـ الشريط بعد القص



٤ ـ القطع عند س　　٥ ـ فك اللويات　　٦ ـ خياطة (لصق) القطع الأخير　　٧ ـ الخياطة على سطح الكرة

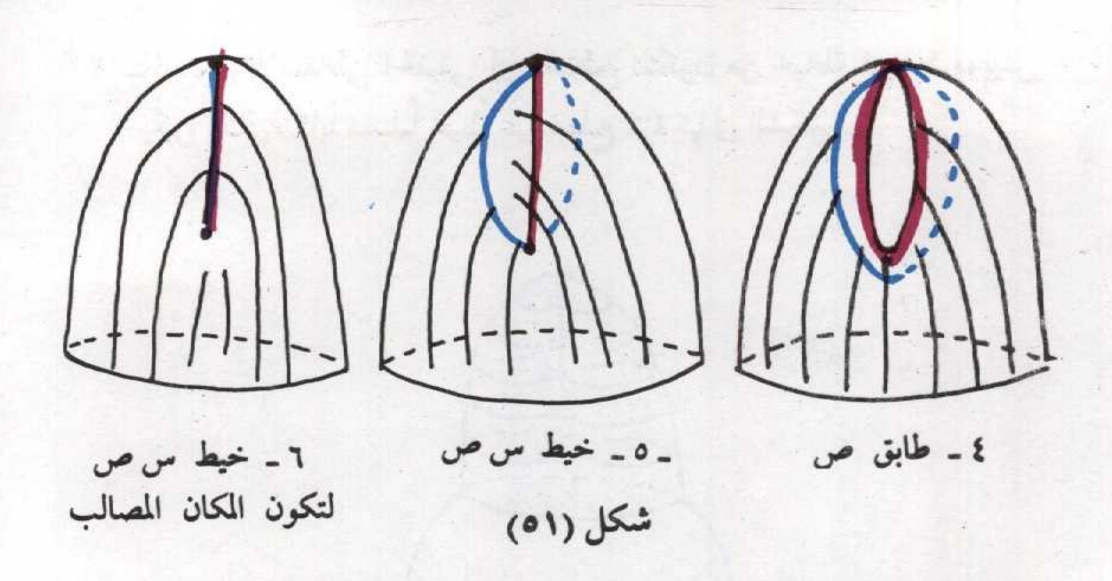
شكل (٤٩)

٢ ــ المستوى الاسقاطى الحقيقى أى السطح المتكون من خياطة شريط موبيس بكرة يكافىء كاباً مصلباً مخيطاً على سطح كرة كما فى الشكل .



شكل (٥٠)

ونوضح ذلك للقارىء الاكبر عن طريق توضيح أن خياطة ثقب قطريا على كرة يكافىء الكاب المصلب المخيط على سطح كرة بمتابعة الرسم التالى :



شكل (٥١)

من المثالين السابقين يتضح أن المستوى الاسقاطى الحقيقى فى هذه الهندسة يكافى كرة أو قرصاً مخيطاً عليها شريط موبيس ويكافىء أيضا كـرة بثقب مخيط قطريا ، كما يكافىء كـرة مخيط عليها كـاب مصلب . وفى الواقـع أن المستوى الاسقاطى الحقيقى له تعريف آخر فى الهندسة العادية وتعريف آخر فى هنـدسة أخرى تسمى الهندسة الاسقاطية . وكلها تعاريف متكافئة .

ويمكن للقارىء الأكبر سنا أو المتخصص أن يصل إلى ذلك كما نبين فيما يلى :

لاحظ لمبة مضيئة ، نجد أنه يخرج منها أشعة مستقيمة فى جميع الاتجاهات .



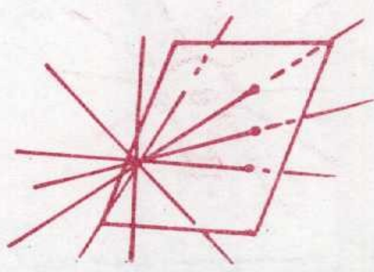
كل هذه الأشعة هى نموذج لجميع المستقيمات من نقطة فى الفراغ العادى ذى الثلاثة أبعاد . فئة كل هذه المستقيمات هى المستوى الاسقـاطى الحقيقى وهى ما يُعرف به المستوى الاسقاطى الحقيقى فى الهندسة العادية .

أما فى الهندسة الاسقاطية فنعرف هذا المستوى الاسقاطى الحقيقى بأنـه : المستوى العادى ومعه نقط عند اللانهاية .

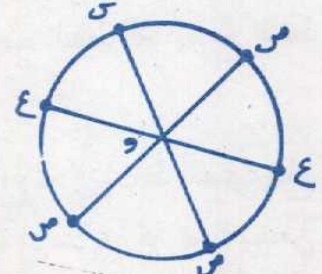
وعموما فالتعريف فى الهندسة العادية يبين التركيب الخطى لهذا المستوى أما التعريف فى الهندسة الاسقاطية فلا يبدو ظريفا لأنه يجمع النقط العادية مع النقط عند اللانهاية .

ولنوضح أن فئة كل المستقيمات من نقطة فى الفراغ تكافىء نقط المستوى مع نقط عند اللانهاية ، تعال نأخذ مستوى سہ لايمر بنقطة الأصل . كل مستقيم من نقطة الأصل اما أن يقطع هذا المستوى سہ فى نقطة أو يوازى المستـوى سہ أى

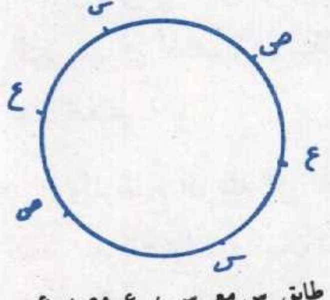
يتقاطع معه فى نقطة عنـد اللانهايـة . أى يوجـد تناظـر (واحد لـواحد) بـين المستقيمات ونقط المستوى مع النقط عند اللانهاية .



ولنوضح أن كل المستقيمات من نقطة الأصل تكافىء المستوى الاسقـاطى الحقيقى فى الهندسة الجديدة نتخيل وجود كرة مركزها عند نقطة الأصل . كل مستقيم من نقطة الأصل يتقاطع مع سطح الكرة فى نقطتين عند نهايتى قطر فيها أى يوجد تناظر (واحد لواحد) بين المستقيمات والنقط القطرية للكرة ، وبالخياطة قطريا فهذا يكافىء خياطة شريط موبيس على كرة .



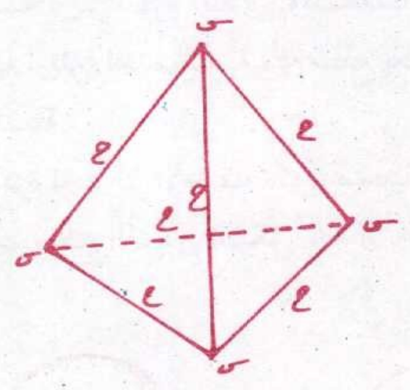
كل مستقيم من و يتقاطع قطريا فى نقطتين مع الكرة



طابق س مع س ، ع مع ، ع

خاصية أويلر للأسطح المتكافئة فى هذه الهندسة :

١ ـ كلنا نعرف مجسمات مثل المكعب والهرم وشكل الطوب . . . . نقول ان المكعب مجسم منتظم فشكله لا يتغير من أى جهة تنظر اليه والواقع يوجد خمسة مجسمات منتظمة عرفت من عهد الاغريق ، ودراستها كانت من النقط الأساسية فى الهندسة العادية (الاقليدية) ولكن العلاقة بين مكونات هذه المجسمات لم تكتشف الا فى القرن السابع عشر على يد العالم الرياضى أويلر . تعال نكتشف هذه العلاقة وسنسميها خاصية أويلر ـ ويقال ان أرشميدس عرف هذه الخاصية من قبل ، بالنسبة للهرم الثلاثى (وهو من



المجسمات المنتظمة) نجد له عدّة أركان نسميها رؤوسا وعدة أوجه مثلثة وأحرف تحدها . عد الرؤوس (س) والأحرف (ح) والأوجه المثلثة (و)

تجدها ٤ ، ٦ ، ٤ على الترتيب لاحظ أن عدد الرؤ وس س ـ عدد الأحرف ح + عدد الأوجه و = ٤ ـ ٦ + ٤ = ٢ وبالنسبة للمكعب عد عدد الرؤ وس س وعدد الأحرف ح وعدد الأوجه و ، تجد أنها على الترتيب ٨ ، ١٢ ، ٦ .

لاحظ أن عدد الرؤ وس س ـ عدد الأحرف ح + عدد الأوجه و = ٨ - ١٢ + ٦ = ٢ .

نسمى س ـ ح + و بخاصية أويلر أو بعدد اويلر .

أى أن خاصية أويلر للهرم الثلاثى وللمكعب هى واحدة وتساوى ٢ والواقع أن خاصية أويلر واحدة بالنسبة لأى سطح يكافىء (توبولوجيا) شكل الكرة فى هذه الهندسة .

وبالنسبة للكرة نجد أن الأحرف تكون منحنية والأوجه أسطح منحنية أيضا فمثلا بتقسيم سطح الكرة فى الشكل نجد أن خاصية أويلر = س - ح + و

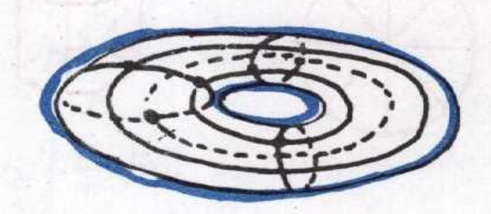




= ٨ - ١٢ + ٦ = ٢

حاول أن تقسم سطح الكرة بأربعة نقط إلى أربعة أوجه مثلثة منحنية و ٦ أحرف منحنية تجد أيضا أن خاصية أويلر لها بأى تقسيم هو ٢.

٢ ــ بالنسبة الى شكل الكحكه بتقسيمه بواسطة ٩ رؤوس مثلا نجد أن

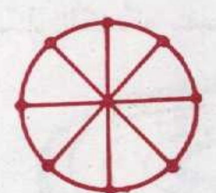


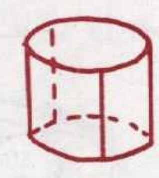
خاصية أويلر = ٩ رؤوس - ١٨ حرف منحنٍ + ٩ أوجه مستطيلة منحنية = صفر

وخاصية أويلر = صفر لكل الأسطح التى تكافىء فى هذه الهندسة شكل الكحكة ، أى شكل الكحكة بفتحة ١ مثل كرة بيد واحدة .

يمكننا بتقسيم السطح أن نعرف خاصية أويلر له أو عن طريق الاستنتاج فمثلا سطح مكعب بدون غطاء هو مكعب ناقص منه وجه يكون خاصية أويلر له أقل من خاصية أويلر للمكعب بواحد أى = ٢ ــ ١ = ١ ، وهذا المكعب بدون غطاء يكافىء فى هذه الهندسة اسطوانة بقاعدة وبدون غطاء ويكافىء بالتحوير قرصاً . وعلى ذلك فخاصية أويلر للقرص = ١ . وبالمثل مكعب بدون قاعدة

وبدون غطاء وهو يكافىء اسطوانة بدون قاعدة وبدون غطاء يكون خاصية أويلر له أقل باثنين من خاصية أويلر للمكعب أى خاصية أويلر للأسطوانة بدون غطاء وقاعدة تكون = ٢ ــ ٢ = صفر ونتحقق من ذلك من التقسيم .





خاصية أويلر للاسطوانة :

س - ح + و = ٤ - ٦ + ٢ = صفر

خاصية أويلر بالنسبة للقرص :

س - ح + و = ١٠ - ١٨ + ٩ = ١

أى أن (ن + ١) رأس - (٢ ن) حرف + ن وجه = ١

٣ ــ عرفنا أن القرص يكافىء فى هذه الهندسة كرة بثقب وعلى ذلك فالكرة بثقب خاصية أويلر لها = ١ .

أما الكرة بثقبين فتكافىء قرصاً بثقب واحد . خاصيـة أويلر للقرص بثقب واحد ينقص ما يكافىء وجهاً لها اى ينقص واحدا (حيث نعتبر الثقب بعد التحوير كأنه قرص صغير) وبذلك فالقرص المثقوب بثقب خاصية أويلر له ١ - ١ = صفر

والقرص بثقبين ينقص ٢ عن خاصية أويلر للقرص فيكون ١ ـ ٢ = ـ ١
ويمكن ان نعمم ذلك ونقول ان القرص بثقبين وهو يكافىء كرة
بثلاثة ثقوب خاصية أويلر له = خاصية أويلر للكرة ـ ٣ = ٢ ـ ٣ = ـ ١ .)
أن كرة بعدد ن من الثقوب قاعدة أويلر لها = ٢ ـ ن .

٤ ـ عرفنا أن الكرة بيد تكافىء فى هذه الهندسة شكل الكحكة بفتحة واحدة . وعلى ذلك فخاصية أويلر للكرة بيد = صفر كما بينا بالنسبة لشكل الكحكة بفتحة ويمكن أن نستنج ذلك بطريقة أخرى فالكرة بيد يمكن أن تتصور أنها كرة نزع منها قرصان (وهما الثقبان) وخيط بهما الأسطوانة التى تمثل اليد .



وعلى ذلك فخاصية أويلر للكرة باليد = خاصية أويلر للكرة ـ ٢ خاصية أويلر للقرص + خاصية أويلر للاسطوانة = ٢ ـ ٢ × ١ + ٠ = صفر .
أى ان خاصية أويلر لشكل الكرة ٢ .
وخاصية أويلر لشكل كرة بيد = ٢ ـ ٢ × ١ = ٢ ـ ٢ = .
هذا يوصلنا إلى النمط :

خاصية أويلر لشكل كرة بيدين = ٢ ـ ٢ × ٢

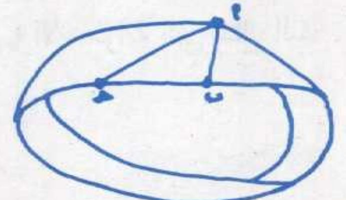
خاصية أويلر لشكل كرة بثلاثة أيدٍ = ٢ ـ ٢ × ٣

خاصية أويلر لشكل كرة بعدد ن من الأيدى = ٢ ـ ٢ × ن

٦ ـ يمكننا أن نصل الى خاصية أويلر لسطح غير موجه .

خاصية أويلر لشريط موبيس = صفر .

حاول أن تتحقق من ذلك من أى تقسيم على شريط موبيس أو من الشريط المستطيل المعمول منه . انظر شكل (أ) ، (ب) .



عدد الرؤوس : ٣ ، الأحرف = ٦ ، الأوجه = ٣

الرؤوس أ ، ب ، جـ = ٣

الأحرف = أ جـ + جب ب أ + أجـ + جب + أب =٦

الأوجه : أ جـ ب ، جـ ب أ ، أ ب جـ = ٣

ـ تحقق من خاصية أويلر لاى تقسيم كالموجود على الشريط المستطيل المعمول منه شريط موبيس فى شكل (جـ)

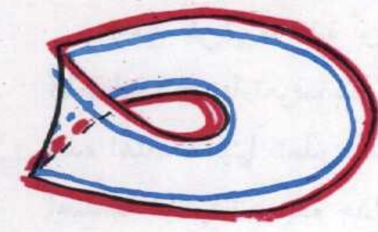
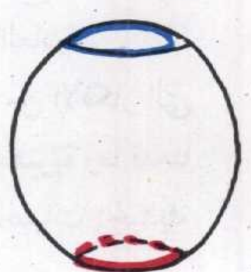
شكل (جـ)

والاجابة : خاصية أويلر = ٤ رأس - ٨ حرف + ٤ وجه = (صفر)

٧ ــ خاصية أويلر لشكل كرة مخيط عليها شريط موبيس (وهى تكافىء المستوى الاسقاطى الحقيقى) أو كرة مخيط عليها كاب مصلب = ١ وخاصة أويلر لكرة مخيط عليها شريطين موبيس = صفر .

وذلك لأن خاصية أويلر لشكل كرة مخيط عليها شريط موبيس = خاصية







١ - كرة بشرطيت موبيس مخيطين عليها

٢ - انكماش الكرة بثقبين إلى اسطوانة

٣ - خياطة الاسطوانة على أحد شريطى موبيس

شكل يوضح أن كرة مخيط عليها شريطان موبيس تكافىء خياطة شريطين موبيس معا

أويلر للكرة ـ خاصية أويلر لقرص نـزع (وهو يمثـل الثقب) لنخيط على حدوده ـ شريط موبيس + خاصية أويلر لشريط مـوبيس = ٢ ـ ١ × ١ + صفر .

ـ حاول أن تصل من ذلك الى نمط توجد منه خاصية أويلر لشكل كرة نخيط عليها ن من شرائط موبيس .

(الاجابة : ٢ ـ ن) .

وعن طريق قاعـدة أويلر للأسـطح الموجهـة وغير المـوجهة أمكن تصنيف الأسطح بنظرية تعرف بنظرية تصنيف السطوح وبهذا أمكن تصنيف الأسطح فى هذه الهندسة بينما يتعذر ذلك بالنسبة للهندسة العادية لأن الأسطح المتكافئة فى الهندسة الجديدة عديدة جدا ومختلفة (غير متكافئة) فى الهندسة العادية .

وعموما فالهندسة الجديدة (التوبولوجى) يوجد بها العديد من الأفكار التى لها سحر وغرائب وتطبيقات واسعة فى نمو الرياضيات وفى الحياة العصرية وما قدمنا هنا ما هو الأ أمثلة بسيطة جدا لنثيرك الى افاق جديدة فى الريـاضيات الحـديثة بجانب محاولة تنمية تفكيرك الهندسى والابتكارى .

وقبل أن اختتم هذا الموضوع أود أن أشير الى نظرية هامة ولها تطبيقات واسعة فى هذه الهندسة الجديدة . وهى نظرية النقطة الشـابتة التى تـوصل اليهـا العالم الرياضى بوانكريه الذى له فضل كبير فى بلورة ونموهذه الهندسة . فقد توصل اليها

قبل موته بيومين فقط . وهذا يبين لنا ان القدرات الابتكارية موجودة فينا ما نبضت فينا الحياة كما ذكرنا .

نظرية النقطة الثابتة :

لنأخذ فكرة مبسطة عن هذه النظرية ، نتصور قطعة مطاط مستديرة وبالمط (الشد) والانكماش (الضغط) واللوى والتدوير والتطبيق أو بأى تحوير بأى طريقة يجعل أى نقطة داخل القطعة المستديرة تظل داخل حدودها (محيطها) . نجد أنه يوجد على الأقل نقطة من نقط هذه القطعة ثابتة فى مكانها . وكذلك اذا تصورنا سائلاً فى زجاجة . وبتقليب هذا السائل بطريقة تجعل الجزئيات على السطح لا تخرج منه أى تظل على السطح ولكن تتحرك حولها الى أوضاع أخرى . فهذه الحركة تبين تحويلات مستمرة للتوزيع الأصلى للجزئيات . بهذه التحويلات وبهذا التقليب تظل على الاقل إحدى الجزئيات فى مكانها . نلاحظ فى هذا المثال أن النقطة الثابتة قد تتغير تبعا للوقت . الا انه بتقليب أو تدوير بسيط يكون المركز ثابتاً . وعموما فنظرية النقطة الثابتة تقول ان كل هذه التحويلات تترك على الأقل نقطة ثابتة . وتمدنا هذه النظرية بوسائل هامة فى اثبات نظريات تعرف بنظريات الوجود . وقد حاول بوانكريه أن يثبت إحدى هذه النظريات التى خمن صحتها ولم يفلح واستطاع غيره بعد ذلك وهو الرياضى بيرخوف اثباتها .

وهذا يبين انه لايوجد فرد يمكن أن يعرف او يبتكر كل شىء والا لما خلق سوى فرد واحد فى هذا العالم . ويبين ايضا أن ثراء العلم يقع فى خلق مشكلات تتحدى التفكير تؤدى إلى استمرارية فى التفكير والابتكار فى حلها بأساليب جديدة ومختلفة من أناس مختلفين .

ومن المشوق أن نعرف أننا نرى جميعا تطبيقات واقعية لنظرية النقطة الثابتة فكلنا شاهد شعر طفل صغير من الخلف ولاحظ وجود نقطة ثابتة ينبت حولها الشعر دائريا فى خطوط منطلقة (أى مشعة) منها . وبنظرية النقطة الثابتة أيضا أمكن تفسير أن الريح لايمكن أن تهب فى كل مكان على سطح الكرة الأرضية فى نفس الوقت ولكن لابد أن يوجد نقطة هادئة ليس فيها ريح .

والآن بعد أن وصلت الى نهاية هذا الكتاب ارجع إلى دراسة مالم تستطع من الجولة الأولى . وحرر تفكيرك واستثمره فى عمل ألعاب جديدة أو التوصل الى أشكال جديدة أو تطبيقات جديدة أو تحقيق لأفكار رياضية ورد أو مرتبطة بما وردت فى هذا الكتاب .

مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب

رقم الإيداع بدار الكتب ١٩٩٢/٨٣٨٠

ISBN 977 - 01 - 3153 - 9